# TITLE

AUTHOR

# TITLE

RESEARCH THESIS

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN FOOD PROCESSING

**AUTHOR**

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION — ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ADAR, 5758 HAIFA MARCH, 1998

THIS RESEARCH THESIS WAS SUPERVISED BY MY LOVELY ADVISOR AND DR. Z Q UNDER THE AUSPICES OF THE ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT

# ACKNOWLEDGMENT

I am grateful to ...
I wish to express gratitude to...

THE GENEROUS FINANCIAL HELP OF MR. G AND MRS. HH IS GRATEFULLY ACKNOWLEDGED

Dedicated to ...

# Contents

# List of Figures

# List of Tables

# Abstract

This is only an example. This should be the abstract of the thesis, in accordance to the standards and demands listed by the Graduate School.

This abstract is part of the thesis, not the advertising abstract which is to be submitted as a separate item.

# List of Symbols

$u_i^*$ :component of the vector u

$\Phi$ :outer the diameter of the piece

$\phi$ :inner diameter of the piece

$u_i^*$ :component of the vector u

$\Phi$ :outer the diameter of the piece

$\phi$ :inner diameter of the piece

$u_i^*$ :component of the vector u

$\Phi$ :outer the diameter of the piece

$\phi$ :inner diameter of the piece

$u_i^*$ :component of the vector u

$\Phi$ :outer the diameter of the piece

$\phi$ :inner diameter of the piece

$u_i^*$ :component of the vector u

$\Phi$ :outer the diameter of the piece

$\phi$ :inner diameter of the piece

$u_i^*$ :component of the vector u

| | |
|---|---|
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |
| $\Phi$ | :outer the diameter of the piece |
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |
| $\Phi$ | :outer the diameter of the piece |
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |
| $\Phi$ | :outer the diameter of the piece |
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |
| $\Phi$ | :outer the diameter of the piece |
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |
| $\Phi$ | :outer the diameter of the piece |
| $\phi$ | :inner diameter of the piece |
| $u_i^*$ | :component of the vector u |

# Chapter 1

# Preface

This is the preface.

An integral equation of the first kind

$$Kf \; = \; \int_a^b k(s,t)f(t)dt \; = \; g(s) \tag{1.1}$$

An integral equation of the first kind

$$K \; : \; L_2[a,b] \; \longrightarrow \; L_2[a,b], \; k \; \in L_2([a,b] \times [a,b]) \tag{1.2}$$

is known to be an ill-posed problem.

$$R(K) \; + \; R(K)^{\perp} \; = \; K \; : \; L_2[a,b]L_2([a,b] \times [a,b] \tag{1.3}$$

$$K \; : \; = \; L_2[a,b] \tag{1.4}$$

$$Kf \; = \; \int_a^b k(s,t)f(t)dt \; = \; g(s) \tag{1.5}$$

The following is an example. It's but a short exerpt from a thesis which was subsequently submitted in a modified version. An integral equation of the first kind

$$Kf \; = \; \int_a^b k(s,t)f(t)dt \; = \; g(s) \tag{1.6}$$

$$K \ : \ L_2[a,b] \ \longrightarrow \ L_2[a,b], \ k \ \in L_2([a,b] \times [a,b]) \tag{1.7}$$

is known to be an ill-posed problem.

The solution of (1) is the least square solution of minimal norm, and whenever $g$ belongs to

$$R(K) \ + \ R(K)^{\perp} K \ : \ L_2[a,b] \ \longrightarrow \ L_2[a,b]k \ \in L_2([a,b] \times [a,b]$$

such a unique solution exists. $R(K)$ is the range space of $K$ and $R(K)^{\perp}$ its orthogonal subspace.

It is also well known that, whenever the kernel $k$ belongs to $L_2$, the integral operator is compact (see Groetsch [10], pp.11-12). Thus, arbitrarily small changes in $g$ may cause arbitrarily large ones in $f$. It has already been pointed out that this sensitivity of $f$ will be the more severe, the faster the singular values of $K$ tend to zero (see Golberg [9], pp.36-40, Groetsch [10], p.2).

An integral equation of the first kind

$$Kf \ = \ \int_a^b k(s,t)f(t)dt \ = \ g(s) \tag{1.8}$$

$$K \ : \ L_2[a,b] \ \longrightarrow \ L_2[a,b], \ k \ \in L_2([a,b] \times [a,b]) \tag{1.9}$$

is known to be an ill-posed problem.

As an expression of this ill-posedness, for many numerical methods (e.g. Galerkin, collocation) the approximate solution of (1) fails in general to converge to the exact solution $f$. And even if it does converge, faster decrease of the singular values of the operator $K$ will involve faster increase of the condition numbers for the matrices approximating the operator. It is thus important to estimate the

$$\tag{1.10}$$

growth of these (spectral) condition numbers.

Lower bounds of the condition numbers are given by G.M.Wing in [12] for both the Galerkin and collocation methods.

An integral equation of the first kind

$$Kf \;=\; \int_a^b k(s,t)f(t)dt \;=\; g(s) \tag{1.11}$$

$$K \;:\; L_2[a,b] \;\longrightarrow\; L_2[a,b],\;\; k \;\in L_2([a,b]\times[a,b]) \tag{1.12}$$

is known to be an ill-posed problem.

The main object of this work is bounding the condition number from both sides, in terms of the singular values of the operator $K$, the numerical method being a variant of finite-dimensional Tikhonov regularization (see Marti [13], [11], Groetsch [10]).

**Corollary 1** : *Under the assumptions of Corollary 2 - Corollary 1 and Theorems 2,3 hold when using the basis* $\tilde{v}$ *and* $H_1 \;=\; H_2 \;=\; L_2[0,1]$.

**Proof:** The condition number is the same in the basis $v$ as in $\tilde{v}$. $\square$

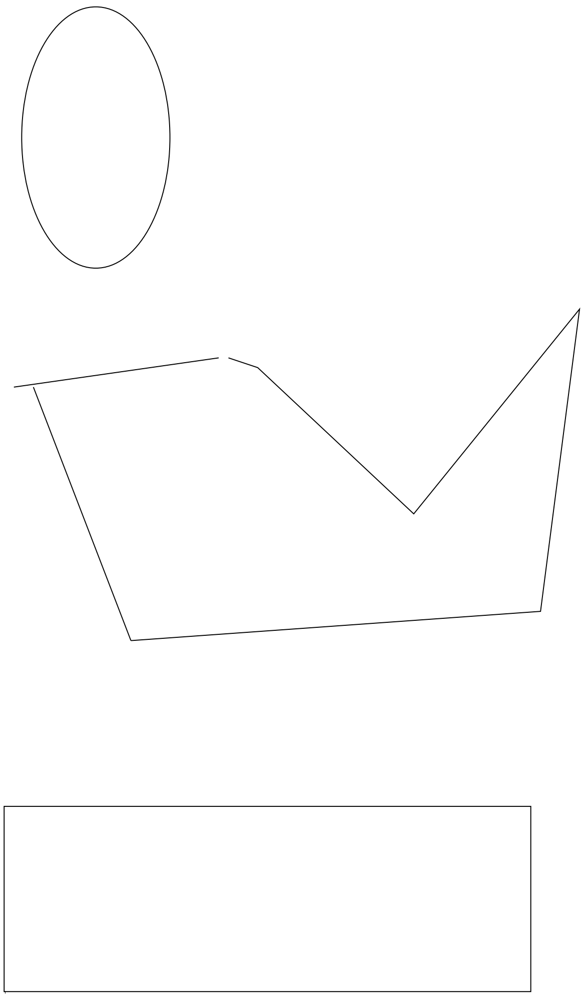


Figure 1.1: First English Caption

איור 1.1: דוגמה ראשונה

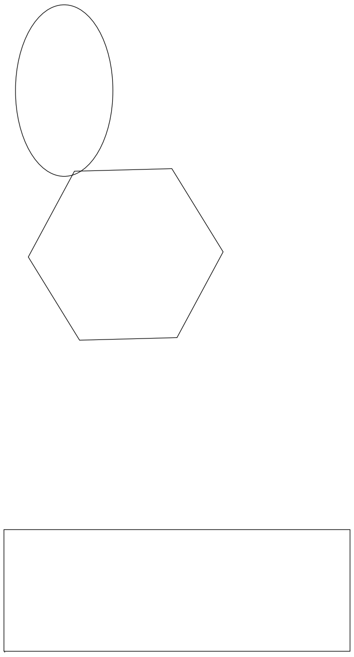


Figure 1.2: Second English Caption

איור 1.2: דוגמה שניה

# Chapter 2

# First Chapter

## 2.1 First Section of First Chapter

### 2.1.1 First Subsection

#### First Subsubsection

Let $H_1$ and $H_2$ be real Hilbert spaces 5, 14, C, 20 with respective inner products $(.,.)_1$ , $(.,.)_2$, and $K$ a compact, linear, non-degenerate operator from $H_1$ into $H_2$.

## 2.2 Second Section of First Chapter

### 2.2.1 Second Subsection

#### Second Subsubsection

1. hjsdfhjsdf

2. kdfmnmnc

3. fdndf
    (a) hjsdfhjsdf
    (b) hjsdfhjsdf
    (c) bndbndf
    (d) kdfmnmnc
        i. hjsdfhjsdf
        ii. hjsdfhjsdf
            A. hjsdfhjsdf
            B. hjsdfhjsdf
            C. bndbndf
            D. kdfmnmnc
            E. bndbndf
        iii. bndbndf
        iv. kdfmnmnc
        v. bndbndf
    (e) bndbndf
4. bndbndf

### Second Section of First Chapter

```
Bla␣bla␣bla...
   \L{comment}
   verylongline␣␣verylongline␣␣verylongline␣␣verylongline
```

| Nr. crt. | Fruit | Quantity |
|---|---|---|
| 1. | apples | 2kg. |
| 2. | oranges | 4kg. |
| 3. | bananas | 2.5kg. |
| 4. | mango | 3kg. |

Table 2.1: First Table
טבלה 2.1: טבלה מספר אחד

```
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣verylongline␣␣verylongline␣␣verylongline
verylongline␣␣verylongline␣␣verylongline␣␣verylongline
␣␣␣|␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣|␣|
#%&&_!$)*(!$_|\"‘‘dfl’’
```

**Second Section of First Chapter**

Here you can see an example of a table.

# Chapter 3

# Second Chapter

## 3.1 First Section of Second Chapter

Let $H_1$ and $H_2$ be real Hilbert spaces with respective inner products $(.,.)_1$ , $(.,.)_2$, and $K$ a compact, linear, non-degenerate operator from $H_1$ into $H_2$. See the following table

## 3.2 Second Section of Second Chapter

This is a another section. This is the second section of the this chapter.

| Nr. crt. | Fruit | Quantity |
|---|---|---|
| 1. | apples | 2kg. |
| 2. | oranges | 4kg. |
| 3. | bananas | 2.5kg. |
| 4. | mango | 3kg. |

Table 3.1: Second Table
טבלה 3.1: טבלה מספר שתיים

# פרק 4

# חישוב מבוזר ב-UNIX

בפרק הזה נגדיר את המושגים הבסיסיים, ונשתמש בהם בפרקים הבאים כדי לתאר שני אלגוריתמים של מטמורפוזה של עקומות $C_0(r)$ ו- $C_1(r)$.

## 4.1 הגדרות והנחות

כמובן, באופן כללי, גם יותר משתי נקודות שונות בתחום הפרמטרי $\mathcal{D}$ יכולות להתלכד במרחב התלת-ממדי (ראה טבלה 4.1), אבל המקרה הזה הוא מאוד נדיר. בנוסף, ניתן לטפל במקרה הנדיר הזה באופן דומה לטיפול שמתואר בהמשך. לכן נניח שמעתה לכל נקודה $P \in \mathcal{S}$ (נקודת חיתוך עצמי של המשטח הקווי $R(t,r)$) יש בדיוק שתי נקודות

| מספר | סוג הפרות | כמות |
|---|---|---|
| 1. | apples | 2 קילו |
| 2. | oranges | 4 קילו |
| 3. | bananas | 2.5 קילו |
| 4. | mango | 3 קילו |

טבלה 4.1: טבלה מספר שלוש
Table 4.1: Third Table

שונות בתחום הפרמטרי $\mathcal{D}$ המתאימות לנקודה $P$.

לנקודות מראה יש תכונות טופולוגיות חשובות. נזכור, שכל זוג נקודות מראה נמצאת בערך זמן קבוע $t_1 = t_2 = t_0$ ומגדירות נקודת חיתוך עצמי של העקומה שוות הפרמטר.

תהייה $s$ פרמטריזציה אורך הקשת של עקומה שוות פרמטר $C(s) = R(t_0, s)$ של המשטח הקווי עם פרמטר זמן קבוע. עבור שתי זוגות של נקודות מראה צמודות $\{(t_0, s_1), (t_0, s_2)\}$ ו- $\{(t_0, s_3), (t_0, s_4)\}$, כאשר

$$R(t_0, s_1) = R(t_0, s_2) = P_1, \; R(t_0, s_3) = R(t_0, s_4) = P_2$$
$$s_1 < s_3 < s_4 < s_2$$

נסמן ב- $\bar{s_i}$ סטייה קטנה מפרמטר $s_i$, כאשר $i = 1, 2, 3, 4$. כלומר

$$\bar{s_1} = s_1 - \varepsilon_1, \; \bar{s_2} = s_2 + \varepsilon_2, \; \bar{s_3} = s_3 + \varepsilon_3, \; \bar{s_4} = s_4 - \varepsilon_4$$

או $\bar{s_i} = s_i \pm \varepsilon_i$, (ראה טבלה 4.1) כאשר $\varepsilon_i$ הוא פרמטר קטן המוגדר על-ידי המשתמש כדי לשלוט על התהליך של סילוק החיתוכים העצמיים בעקומות שווי פרמטר של המשטח הקווי $R(t, s)$.

נתבונן בעקומה שוות הפרמטר $C(s) = R(t_0, s)$ של המשטח הקווי $R(t, s)$, כאשר קבוע $\equiv t_0$ ו- $s \in [0, 1]$.

# פרק 5

# פקודות בסיסיות לתמיכה בעברית ב-LaXeT

בסעיף זה נכיר את הפקודות הבסיסיות לתמיכה בעברית ב-LaXeT.

כל הפקודות של LATEX קיימות גם ב-LaXeT. פקודות LaXeT מתחילות בלוכסן הפוך ואחריו סידרה של אותיות. כאשר עובדים ב Einstein הלוכסן נראה לעתים על המסך כאילו הוא נמצא מימין לפקודה.

בתחילת העבודה על הקובץ כיוון הכתיבה העיקרי הוא אנגלי.הפקודה `\sethebrew` משנה את הכיוון העיקרי לעברית. הפקודה `\unsethebrew` מחזירה את הכיוון העיקרי לאנגלית. אסור להשתמש בפקודות אלו בתוך פסקה. הן יכולות להופיע רק בין פסקאות.

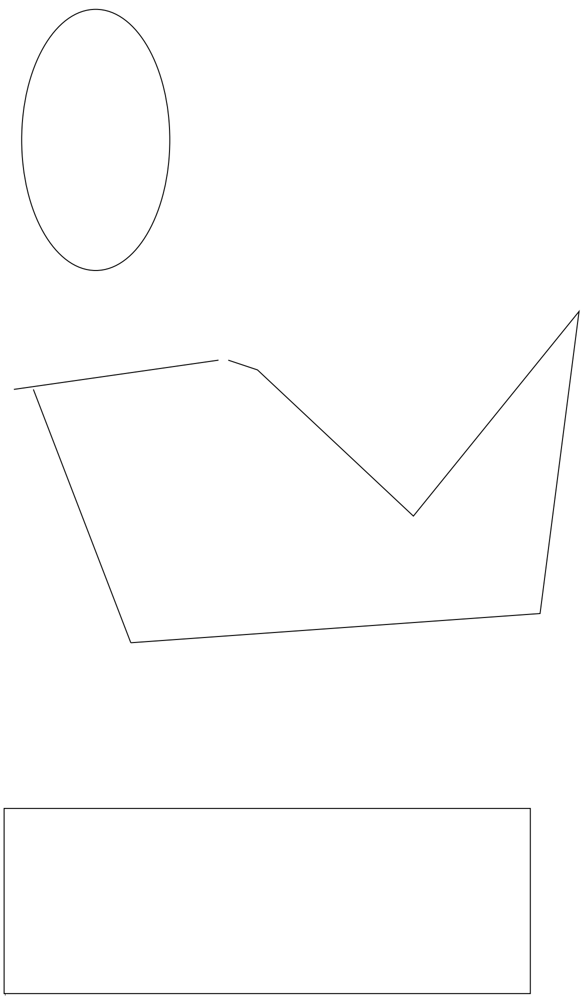
להחלפת הכיוון זמנית, למספרים ולטקסט לועזי משתמשים בפקודה

\ L{...string ...}

לצורך החלפת כיוון זמנית והכנסת טקסט בעברית בתוך טקסט לועזי משתמשים בפקודה

\ R{...טקסט בעברית ...}

ניתן לשנות את הכיוון בתוך קטע שבו כבר שונה הכיוון ללא הגבלת עומק הקינון



איור 5.1: דוגמה לאיור מעניין
Figure 5.1: An example of interesting figure

לדוגמה:

He said “ תן לי 12 שקל בבקשה ”, so I did.

כאשר משתמשים ב einstein, אזי לכתיבת נוסחאות מתמטיות בתוך פיסקה עברית אין צורך במעבר שפה, המעבר לכתיבה מתמטית מחליף גם את הכיוון. יחד עם זאת, לכתיבת נוסחאות מורכבות בתוך טקסט עברי כדאי מאד לעבור סרגל כי הכיוון הטבעי בנוסחאות הוא משמאל לימין. נוסחאות ממורכזות נכתבות גם הן ללא הפיכת הכיוון, אך עם שינוי סרגל.

## 5.1 נספח: הכנת המסמך בעזרת IBM PC

### 5.1.1 איינשטיין

איינשטיין הוא מעבד תמלילים דו-לשוני (עברי אנגלי) נפוץ. בחרנו בו מכל שאר מעבדי התמלילים הקיימים כיום משום שהוא היחידי ששומר את קובץ העבודה שלו בצורה בה LaTeX רוצה לראות את הקלט. קיימים שני סטנדרטים לשמירת אותיות של שפה משנית בכיוון כתובה הפוך בתוך קובץ. השיטה הנפוצה היא לשמור אותם לפי סדר ההופעה על המסך או על הדף. בשיטה זו האותיות בעברית יופיעו בקובץ הפוך מסדר הקריאה. לדוגמה אם נכתוב "דני" בקובץ יופיע קודם "י" ואחריו "נ" ולבסוף "ד". בציוד המחשבים האנגלי הרגיל, אם נציג את הקובץ על המסך או נדפיסו במדפסת נקבל כתב עברי קריא. השיטה השניה שומרת את כל האותיות הסדר הכתיבה והקריאה. אות שנקראת קודם תופיע קודם בקובץ. "דני" יכתב "ד" "נ" "י". בקובץ כזה העברית תראה כתובה הפוך אם נדפיס את הקובץ, אך זו צורה קלה יותר לטיפול בתוכנה. זו הצורה הדרושה לנו. כל מעבד תמלילים אחר ששומר את האותיות בצורה זו יתאים למטרתינו.

### 5.1.2 T.EXE

איינשטיין הוא יותר מעורך טקסטים פשוט. הוא מכיל פקודות ואופציות שממקמות אותו ברמה של מעבד תמלילים. פקודות כגון מירכוז, הדגשה, אינדכסים וכו. קיימות בתוך איינשטיין, אך אלו פרימיטיביות יחסית לכלים המקבילים בTEX. לצורך ממוש פקודות אלה אישטיין משאיר בתוך הקובץ סימנים מיוחדים שמסמנים עבורו מתי ואיך להפעיל את הפקודות האלה. לפני מסירת הקובץ שנוצר בעזרת איינשטיין לTEX, יש לנפות מתוכו את הסימנים האלה.

ניתן לעשות זאת על ידי הפעלת התוכנית T.EXE המצויה על הדיסקט המקורי של einstein.

# Appendix A

# Computer Programs

Following is a short presentation of the FORTRAN sources, one of the input data sets we used, and the results we obtained.

# Appendix B

# Second Appendix

This is just a test example.

End test.

# נספח ג

# נספח שלישי

דוגמא לנספח עברי[1]. נבדוק כאן עבודה עם הגופנים השונים (TEX fonts):

דוגמא קצרת אך מראה *שניתן להשתמש בגופנים* כרצונכם ...

דוגמא קצרת אך מראה *שניתן להשתמש* בגופנים כרצונכם ...

*דוגמא קצרת אך מראה שניתן להשתמש בגופנים כרצונכם ...*

דוגמא קצרת אך מראה *שניתן להשתמש* בגופנים כרצונכם ...

**דוגמא קצרת אך מראה שניתן להשתמש בגופנים כרצונכם ...**

דוגמא קצרת אך מראה שניתן להשתמש **בגופנים** כרצונכם ...

**דוגמא קצרת אך מראה שניתן להשתמש בגופנים כרצונכם** ...

1. ראשון אך לא אחרון
2. שני אבל טוב
   (א) חדש
   (ב) חדש אבל שונה

[1] רוב הדוגמאות בתיזה זאת הן בעברית, אך יש גם כאלה שיותר טוב להציג אותן בלועזית. כמו כן ניתן להוסיף הסברים ארוכים מאוד שלא נכנסים לשורה אחת.

- פשוט פסקה קצרה[2]
- פסקה נוספת
  i. פסקה בפנים
  ii. עוד פסקה בפנים
  iii. פסקה נוספת בפנים
  iv. פסקה אחרונה בפנים[3]
- תפוח בדבש
- מצות החג

(ג) חנוקה בפתח

(ד) עוד מעט סוכות

3. שנה טובה

4. פסקה אחרונה אחרונה ...

[2] כאן ניתן לכתוב הסברים קצרים
[3] גם כאן ...

# רשימת מקורות

[1] א.ב. איהושוע. שלום לישראל. Pitman, ירושליים, יולי 1997.

[2] א.ב. תיהושוע. שלום לישראל. Pitman, ירושליים, יולי 1997.

[3] C. T. H. Baker and G. F. (Eds) Miller. *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods.* Pitman, London, July 1985. Based on the proceedings of a symposium held in Durham, in July, 1982, organized under the auspices of the London Math. Soc.

[4] J.C. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, volume Vol. 18 of *Transl. Math. Monographs.* AMS, 1969.

[5] J.C. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, volume Vol. 18 of *Transl. Math. Monographs.* AMS, 1969.

[6] J.C. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, volume Vol. 18 of *Transl. Math. Monographs.* AMS, 1969.

[7] J.C. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, volume Vol. 18 of *Transl. Math. Monographs*. AMS, 1969.

[8] J.C. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, volume Vol. 18 of *Transl. Math. Monographs*. AMS, 1969.

[9] M. A. Golberg. *Solution Methods for Integral Equations*. Plenum, 1979.

[10] C. W. Groetsch. *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Integral Equation of the First Kind*, pages 11–12. Pitman, 1984.

[11] J. T. Marti. On a regularization method for fredholm equations of the first kind, using Sobolev space. In *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods*. Academic Press, 1982.

[12] J.T. Marti. On the convergence of an algorithm for computing minimum norm solutions of ill-posed problems. *Math. Comp.*, 34:521–527, 1980.

[13] G.M. Wing. Condition numbers of matrices arising from the numerical solution of linear integral equations of the first kind. *J. Integral Equations*, 9, (Suppl.):191–204, Sept. 1985.

# הכותרת

שם המחבר

# הכותרת

חיבור על מחקר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר
מגיסטר למדעים
בעיבוד מזון

## שם המחבר

הוגש לסנט הטכניון — מכון טכנולוגי לישראל

אדר תשנ"ח | חיפה | מרץ 1998

חיבור על מחקר נעשה בהדרכת המנחה האהוב שלי ופרופ׳ שולי
בפקולטה להנדסת חשמל

# הכרת תודה

הנני אסיר תודה לפרופ״ח א׳ על עזרתם בכל שלבי המחקר ועל ...
עבודה זו מוקדשת ל...

אני מודה למר ג׳ ולמר ד׳ על התמיכה הכספית הנדיבה בהשתלמותי

העבודה מוקדשת ל...

# תוכן ענינים

# רשימת איורים

# רשימת טבלאות

# תקציר

העבודה הזאת חוקרת היבטים מסויימים הקשורים בפיתרונות נומריים של משואות אינ-טגרליות מסוג ראשון.

קימות דוגמות רבות של שימושים מעשיים עבור משואות אינטגרליות מסוג ראשון. מסויימים הקשורים בפיתרונות נומריים.